

2009학년도 수시2학기
면 접 고 사 답 안 지 A

문제 2. 함수 $f: M \rightarrow M$ 은 모든 $x \in M$ 에 대하여, $f(f(f(x))) = x$ 를 만족한다.

(a) (10점) 일대일 대응 함수의 정의는 무엇인가?

(b) (20점) 함수 f 는 일대일 대응임을 보여라.

(c) (20점) 집합 $M = \{1, 2, \dots, 2008\}$ 일 때, 적당한 자연수 $k \in M$ 에 대하여 $f(k) = k$ 임을 보여라.

풀이.

(a) 총10점	일대일 함수이고 공역과 치역이 같다	같은 것은 같은 것으로 간다 (0점) 다른 것은 다른 것으로 간다 (5점) 공역과 치역이 같다 (5점) 위 두 개를 모두 대답하면 (10점)
(b) 총20점	<p>(1) $x, y \in M$에 대하여, $f(x) = f(y)$라 하자. 그러면 $x = f(f(f(x))) = f(f(f(y))) = y$이므로 $x = y$가 되어 f는 일대일 함수.</p> <p>(2) 또한 모든 $m \in M$에 대하여 $f(f(f(m))) = m$이므로 함수 f의 공역과 치역은 같다.</p> <p>별해: $f^2 \circ f(x) = x = f \circ f^2(x)$이므로 f^2는 f의 역함수이므로 f는 일대일 대응이다.</p>	(1) (2) 각 10점
(c) 총20점	<p>(1) 위의 성질을 만족하는 정수 k가 존재하지 않는다고 하자. $a \in M$에 대하여, $f(a) = b$라 하자. $f(b) = a$이면 $f(f(f(a))) = b$이므로 모순이다. 이제 $f(b) = c$라 하자. 그러면 가정에 의하여 $f(c) = a$가 된다. 따라서 함수 f는 M의 세 개의 원소에 대하여 싸이클을 이루며 서로 서로를 보낼 수 있다.</p> <p>(2) 한편 2008은 3으로 나누면 나머지가 1이므로 어느 한 원소를 이렇게 갈 수 없다. 그러므로 $f(k) = k$인 원소가 반드시 존재한다.</p>	<p>세 개의 원소가 싸이클을 이룬다는 사실을 언급하면 (5점)</p> <p>(1)을 증명하면 (10점)</p> <p>(2)을 증명하면 (10점)</p>